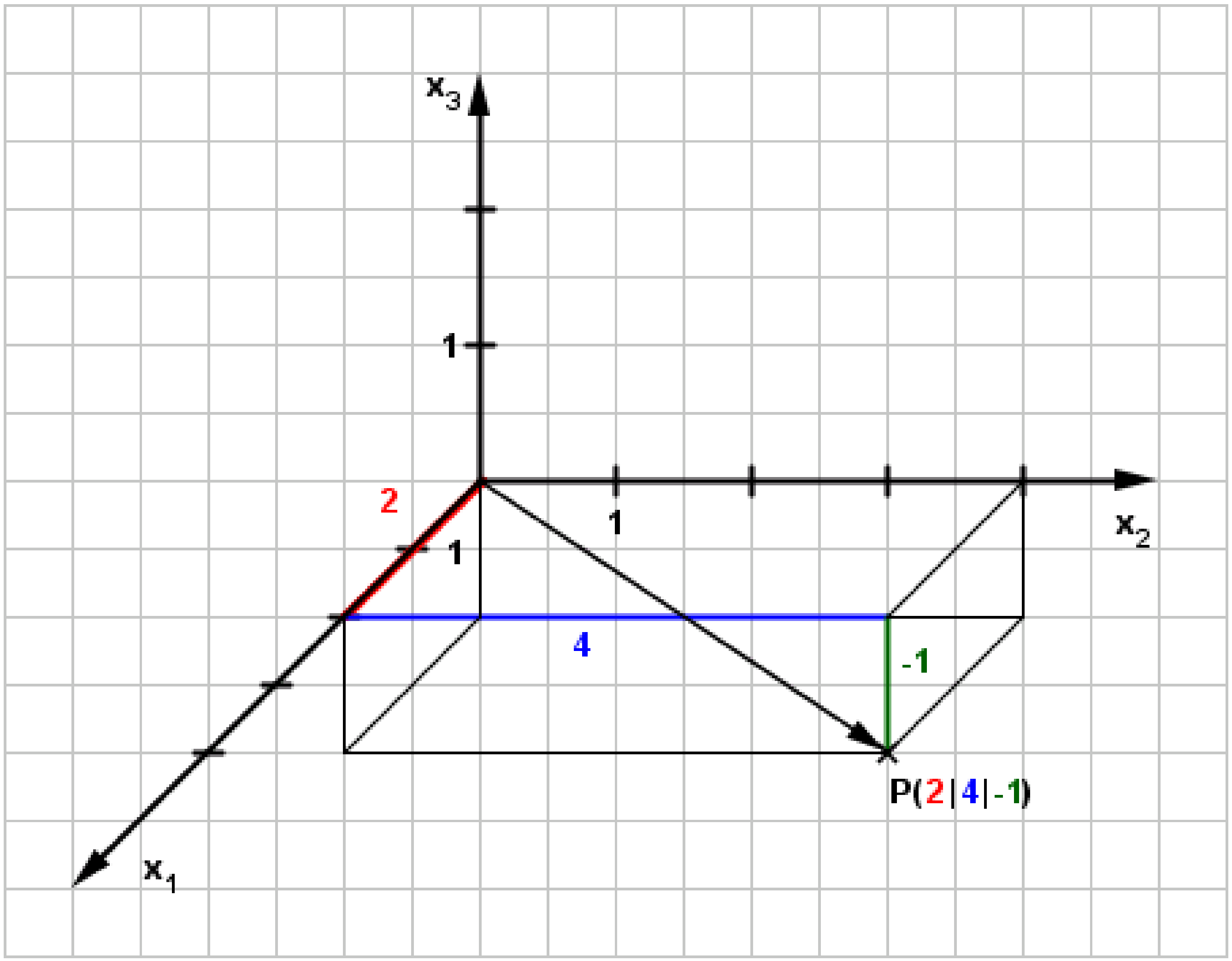
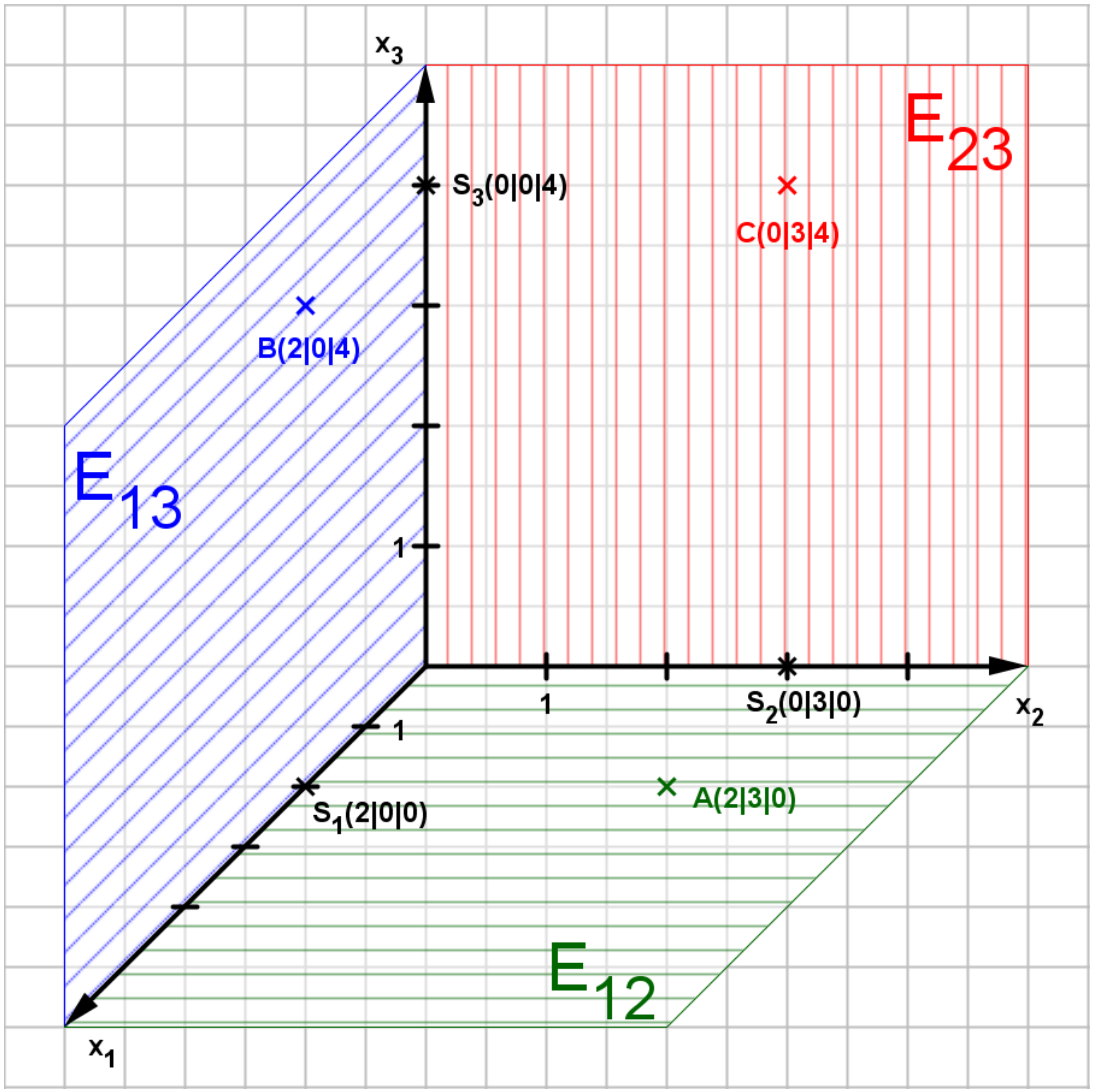
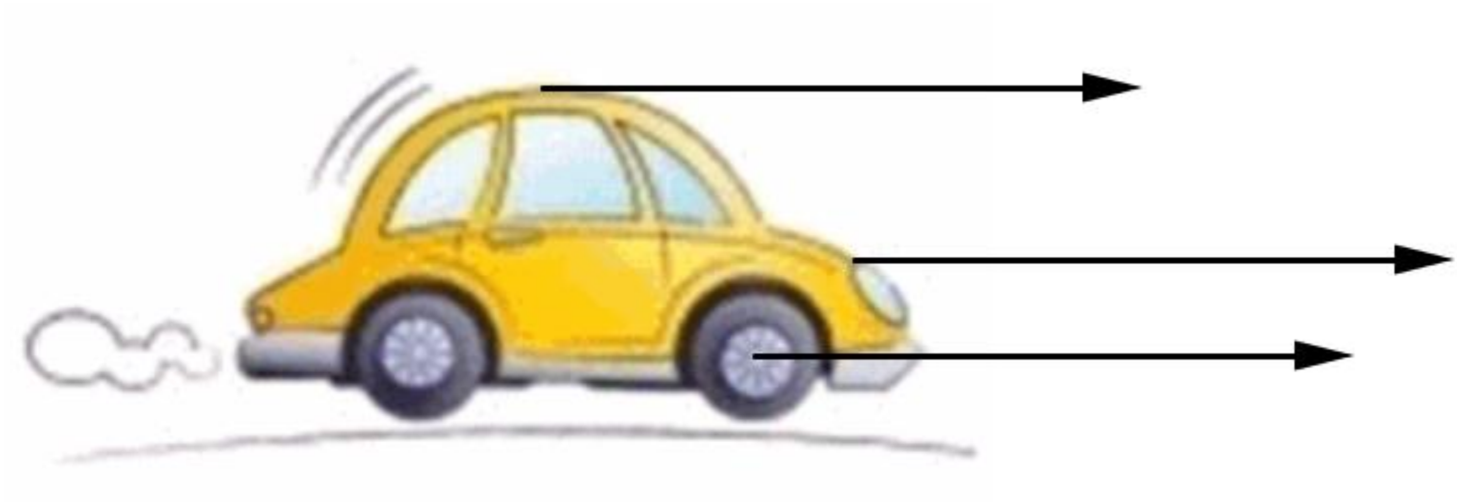
1. Das dreidimensionale Koordinatensystem



Sonderfälle:

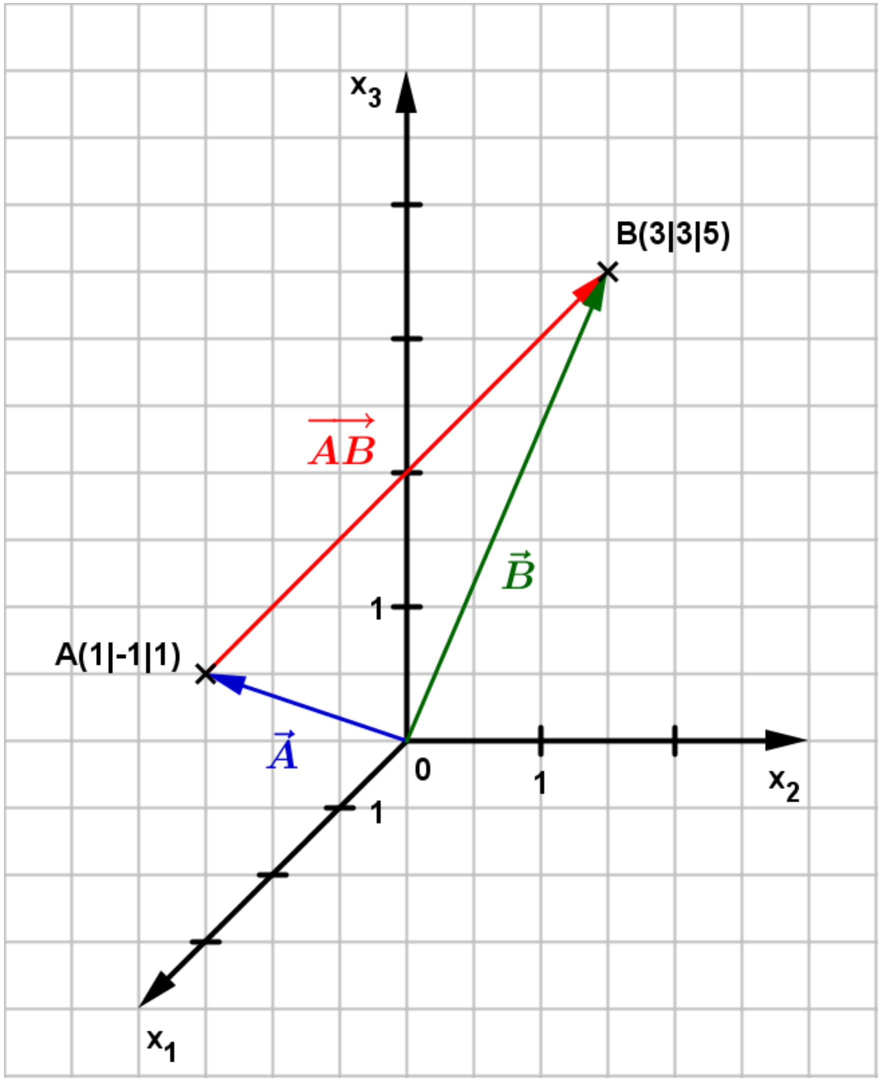


2. Vektoren



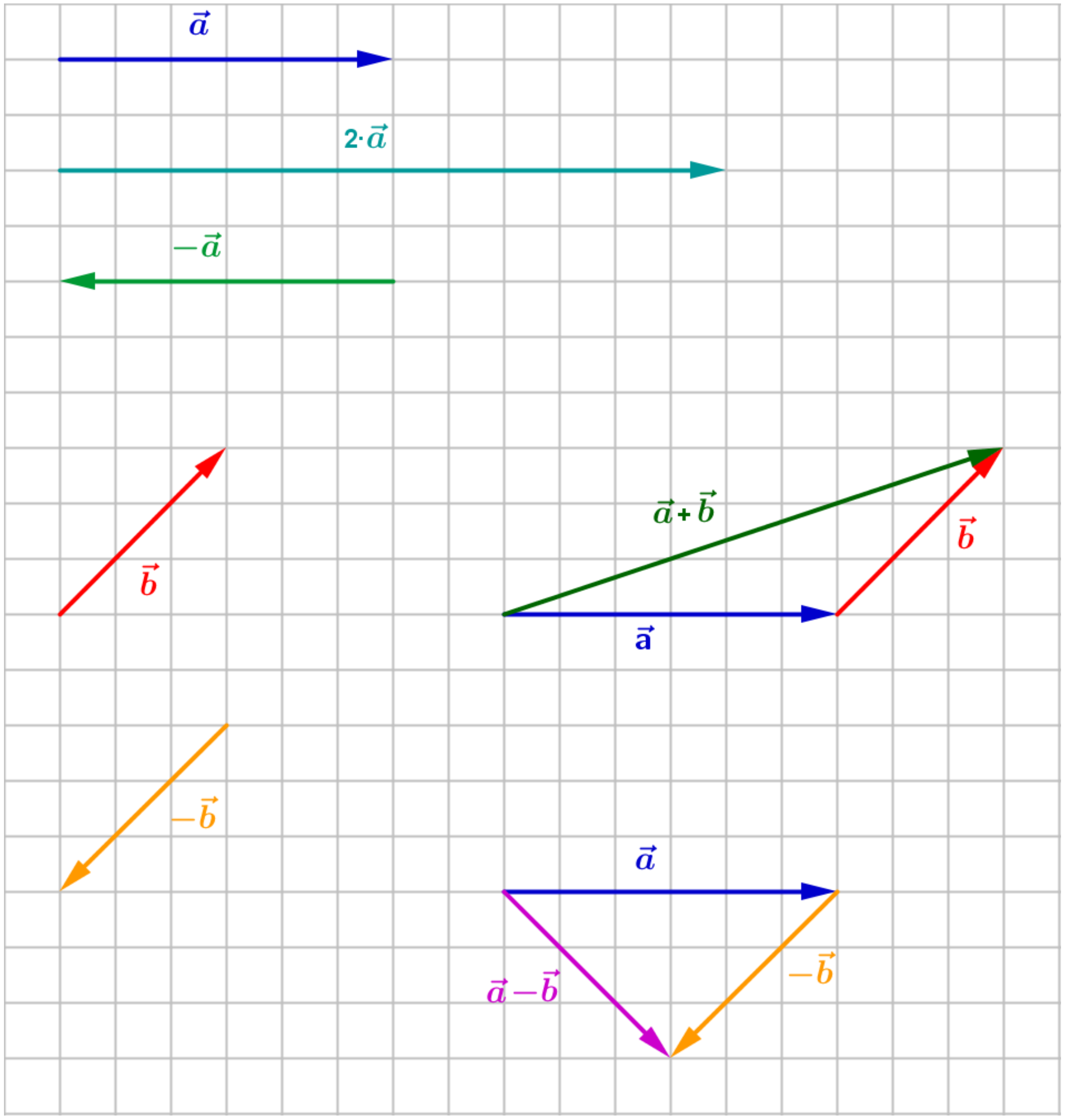
Ein Vektor ist die Menge aller Pfeile mit gleicher Richtung und gleicher Länge.

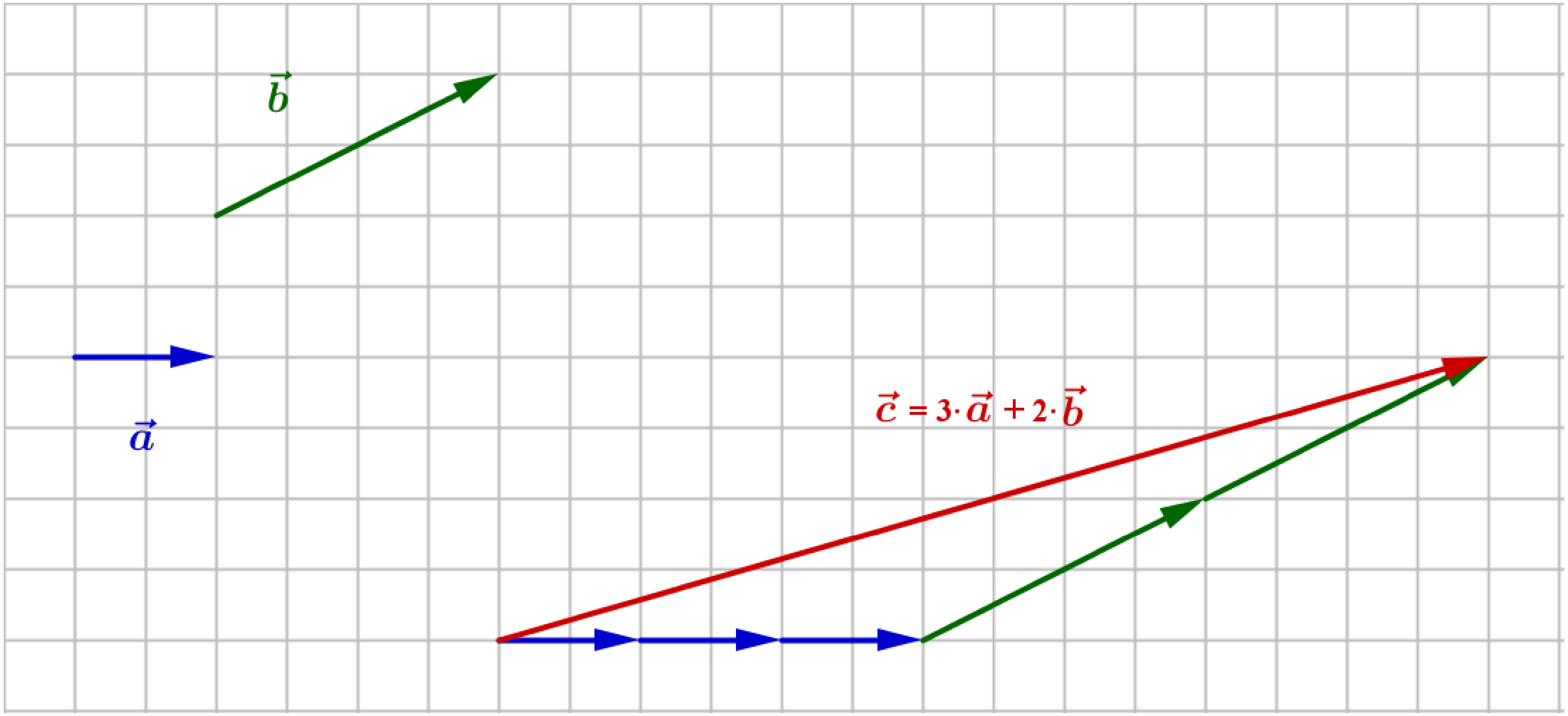
Orts- und Verbindungsvektoren



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-(-1) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Vektoren





Der Vektor $\vec{c} = 3\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{b}$ heißt <u>Linearkombination</u> der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Allgemein heißt ein Vektor $r_1\cdot\vec{a}_1 + r_2\cdot\vec{a}_2 + \ldots + r_n\cdot\vec{a}_n$ Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Vektoraddition

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-1)\\2+3\\-3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$$

S-Multiplikation

$$r\cdot\vec{a}=r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cdot a_1\\r\cdot a_2\\r\cdot a_3\end{pmatrix}$$

$$2\cdot\vec{a}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1\\2\cdot 2\\2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor.

$$\boxed{\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}}$$

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Länge einer Strecke

$$\boxed{\overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right|}$$

$P(-4|1|3) \qquad Q(0|-2|3)$

$$\overline{PQ} = \left|\begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-1 \\ 3-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$$

Mittelpunkt einer Strecke

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q})}$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt von Vektoren

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

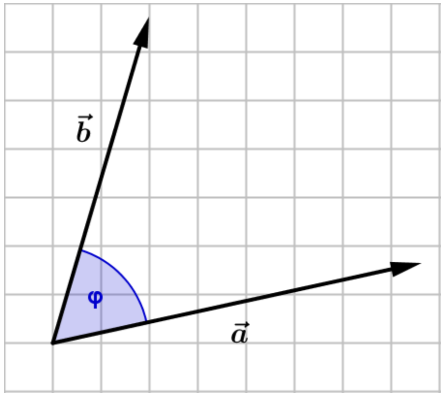
$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 6 - 3 = 2$$

Orthogonale Vektoren

$$\boxed{\vec{c} \circ \vec{d} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} \perp \vec{d}}$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}}$$



$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{154}}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi = 80{,}7°$$

Vektorprodukt

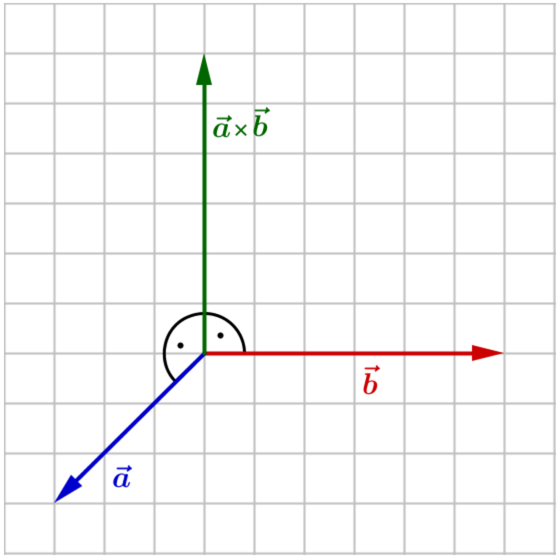
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-9) \\ 3-1 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ **ist zu** $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **orthogonal.**

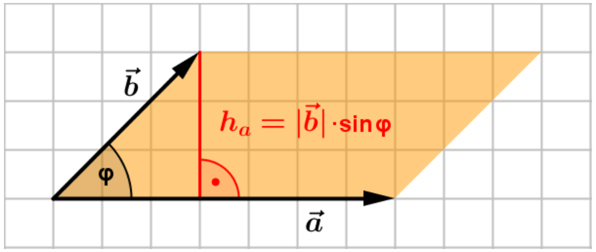
$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$



Anwendungen des Vektorprodukts

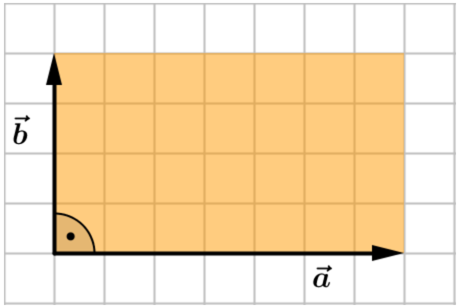
Flächenberechnungen

Parallelogramm



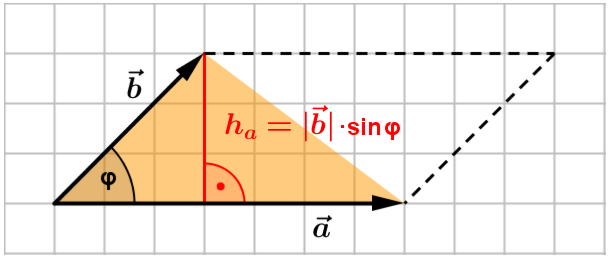
$$A_P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Rechteck



$$A_R = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

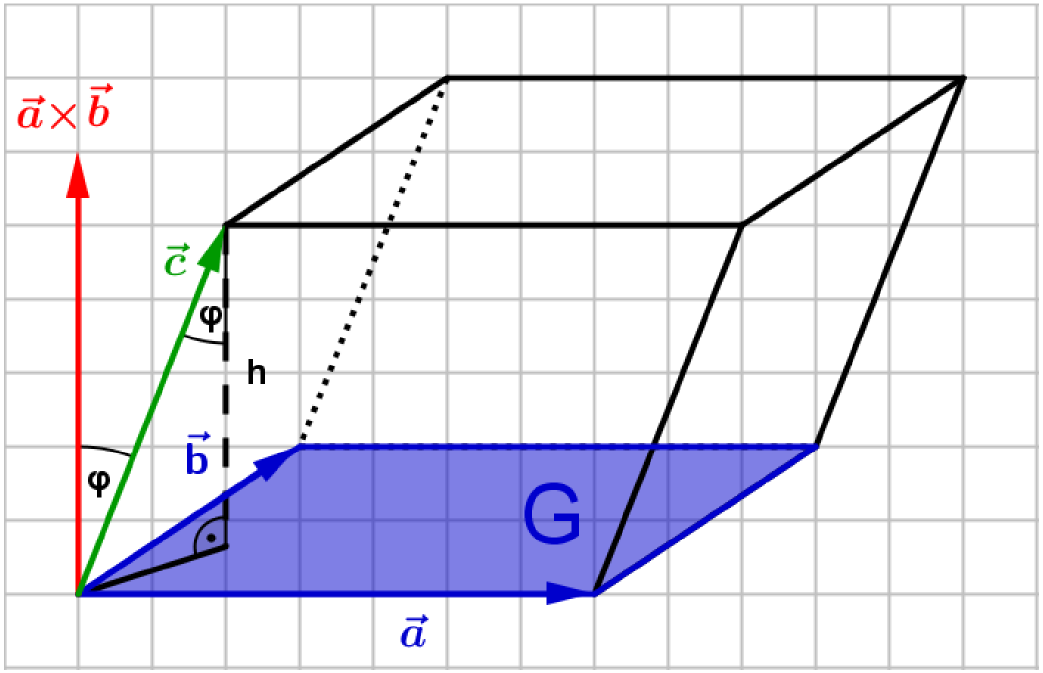
Dreieck



$$A_D = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

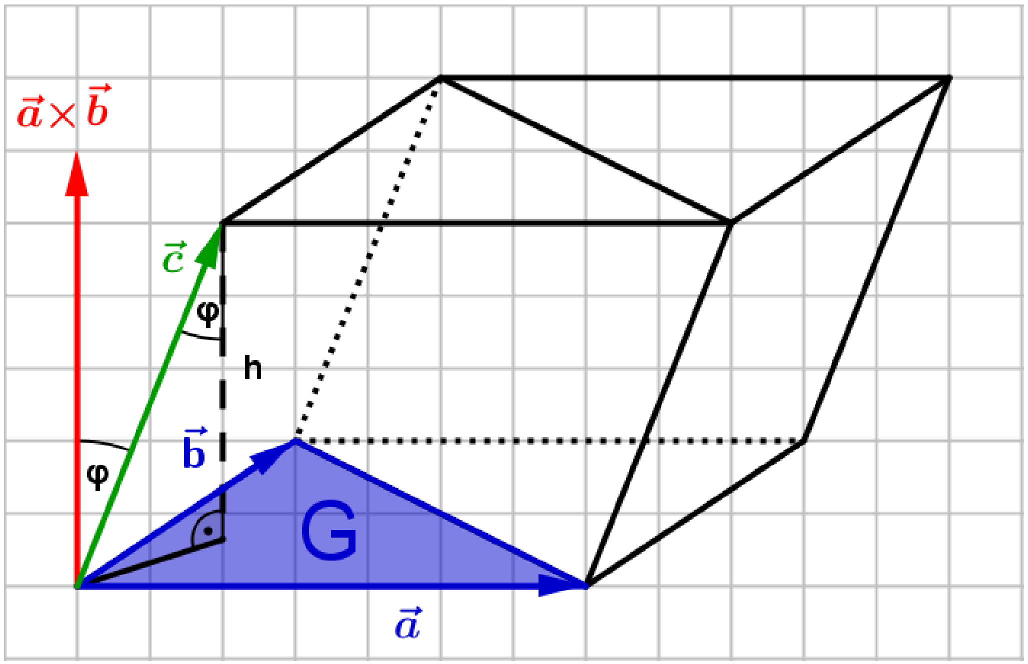
Volumenberechnungen

Spat



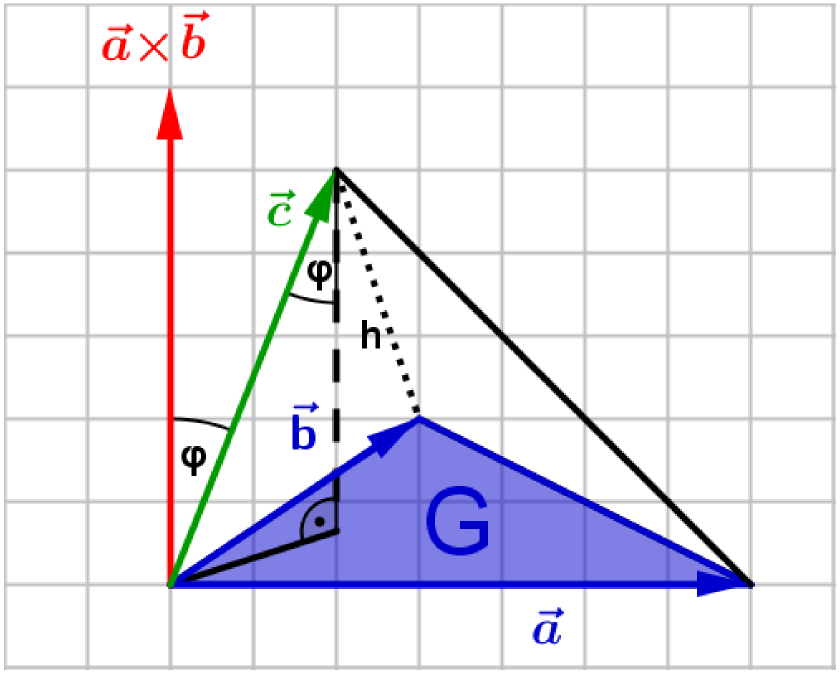
$$V_{Spat} = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right|$$

Dreiseitiges Prisma



$$V_{3Pr} = \frac{1}{2} \cdot \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right|$$

Dreiseitige Pyramide

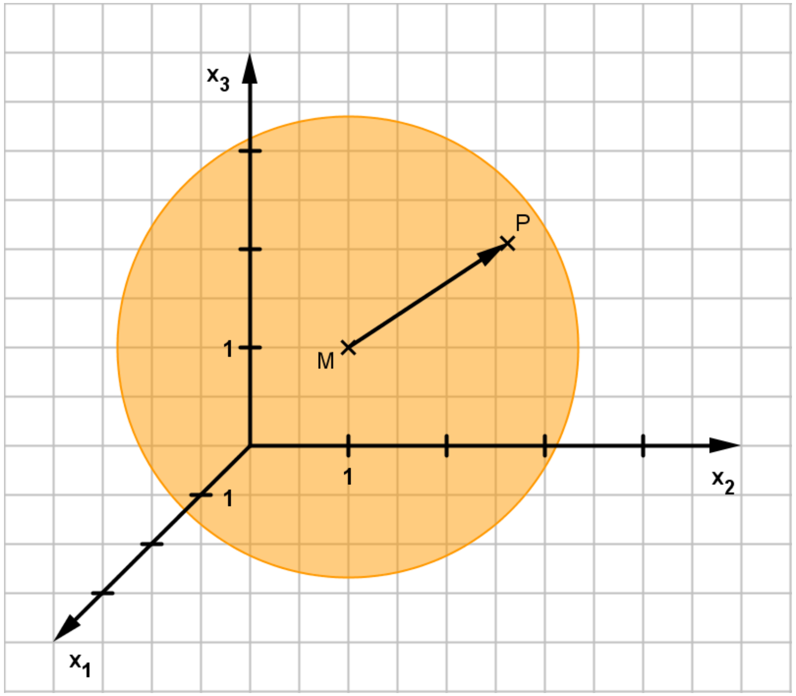


$$V_{3Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right|$$

3. Kugeln im Koordinatensystem

Eine Kugel besteht aus allen Punkten, die von einem Punkt (Mittelpunkt M) denselben Abstand (Radius r) haben.

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| = r$$



Vektordarstellung:

$$\boxed{(\vec{P} - \overrightarrow{M})^2 = r^2}$$

Koordinatendarstellung:

$$\boxed{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}$$

Mögliche Aufgaben

- Liegt Punkt innerhalb, außerhalb oder auf einer Kugel ?
- Wie liegen Kugeln zueinander ?
- Abstand zweier Kugeln
- Berührt eine Kugel mit Radius r eine Koordinatenebene, so kann auf eine Koordinate des Mittelpunktes geschlossen werden